دانشکده ریاضی

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی دو — ترم اول ۸۵–۱۳۸۴

۱− مطلوب است محاسبه مساحت سطح محدود به منحنی $\sqrt[۴]{\frac{x}{a}}+\sqrt[۴]{\frac{y}{b}}=۱$ و واقع در ربع اول.

حل. در اینجا دامنه عبارت است از $D:۰\le x, ۰\le y, \sqrt[۴]{x/a}+\sqrt[۴]{y/b}\le ۱$. با فرض $x=au\cos^{۲}v$ و $y=bu\sin^{۲}v$، داریم

$$J=\left|\det\begin{bmatrix} a\cos^{۲}v & -۲au\sin v\cos v\\ b\sin^{۲}v & ۲b\sin v\cos v\end{bmatrix}\right|=|abu\sin(۲v)| \qquad ; \qquad D':۰\le u\le ۲, ۰\le v\le \pi/۲$$

در نتیجه

$$\mathrm{Area}(D)=\iint_D dA=\iint_{D'}|abu\sin(۲v)|\,dA'=ab\Big(\int_۰^۱ u\,du\Big)\Big(\int_۰^{\pi/۲}\sin(۲v)\,dv\Big)=ab\times\frac{۱}{۲}\times ۲=ab$$

۲− مقدار انتگرال $\iiint_V z\,dV$ که در آن V حجم واقع در یک هشتم اول مختصات، و بالای صفحهٔ $z=x+y-۱$ و زیر صفحهٔ $z=۱$ است، را محاسبه کنید.

حل. با توجه به صورت مسأله، حدود ناحیهٔ مورد نظر چنین است:

$$V\ :\ ۰\le x\ ۰\le y\,,\ ۰\le z\,,\ x+y-۱\le z\,,\ z\le ۱\ :\ ۰\le x\le ۱,\ ۰\le y\le ۲-x\,,\ x+y-۱\le z\le ۱$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\iiint_V z\,dV &= \int_۰^۲\left(\int_۰^{۲-x}\left(\int_{x+y-۱}^{۱} z\,dz\right)dy\right)dx=\int_۰^۲\left(\int_۰^{۲-x}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}(x+y-۱)^{۲}\right)dy\right)dx\\ &= \frac{۱}{۲}\int_۰^۲\left[y-\frac{۱}{۳}(x+y-۱)^{۳}\right]_۰^{۲-x}dx=\frac{۱}{۶}\int_۰^۲(x^{۳}-۳x^{۲}+۴)\,dx=\frac{۲}{۳}\end{aligned}$$

۳− انتگرال تابع $|xyz|$ را بر ناحیه محدود به بیضی‌گون $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$ محاسبه کنید.

حل. از مختصات کروی وزندار $x=a\rho\sin\varphi\cos\theta$، $y=b\rho\sin\varphi\sin\theta$ و $z=c\rho\cos\varphi$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $J=abc\rho^{۲}\sin\varphi$ و ناحیهٔ تصویر شده عبارت است از $V'\ :\ ۰\le\varphi\le\pi\,,\ ۰\le\theta\le ۲\pi\,,\ ۰\le\rho\le ۱$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\iiint_V |xyz|\,dV &= \iiint_{V'}\Big|(a\rho\sin\varphi\cos\theta)(b\rho\sin\varphi\sin\theta)(c\rho\cos\varphi)\Big|\,(abc\rho^{۲}\sin\varphi)\,dV,\\ &= a^{۲}b^{۲}c^{۲}\iiint_{V'}\rho^{۵}\sin^{۳}\varphi\Big|\cos\varphi\cos\theta\sin\theta\Big|\,dV'\\ &= a^{۲}b^{۲}c^{۲}\left(\int_۰^۱\rho^{۵}\,d\rho\right)\left(\int_۰^{\pi}\sin^{۳}\varphi\Big|\cos\varphi\Big|\,d\varphi\right)\left(\int_۰^{۲\pi}\Big|\cos\theta\sin\theta\Big|\,d\theta\right)\\ &= ۸a^{۲}b^{۲}c^{۲}\left(\int_۰^۱\rho^{۵}\,d\rho\right)\left(\int_۰^{\pi/۲}\sin^{۳}\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_۰^{\pi/۲}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)\\ &= ۸a^{۲}b^{۲}c^{۲}\times\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۶}a^{۲}b^{۲}c^{۲}\end{aligned}$$

۴− مطلوب است محاسبهٔ جرم قسمتی از کره $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ که توسط استوانه $x^۲+y^۲=۲x$ جدا شده است و چگالی در هر نقطهٔ (x,y,z) برابر $\delta=x^۲+y^۲+z^۲$ است.

حل. دامنهٔ این مسأله $V\ :\ x^۲+y^۲\le ۲x\,,\ x^۲+y^۲+z^۲\le ۴$ است. آن را به مختصات استوانه‌ای می‌بریم:

$$\begin{aligned} V' \ &:\ r^۲\le ۲r\cos\theta\,,\ r^۲+z^۲\le ۴ \ :\ ۰\le\cos\theta\,,\ ۰\le r\le ۲\cos\theta\,,\ z^۲\le ۴-r^۲ \\ &:\ -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}\,,\ ۰\le r\le ۲\cos\theta\,,\ -\sqrt{۴-r^۲}\le z\le\sqrt{۴-r^۲} \end{aligned}$$

در نتیجه، با فرض $u=\sqrt{۴-r^۲}$ داریم

$$\begin{aligned} m &= \iiint\limits_V \delta\,dV=\iiint\limits_{V'}(r^۲+z^۲)\,r\,dV'=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left(\int_۰^{۲\cos\theta}\left(\int_{-\sqrt{۴-r^۲}}^{\sqrt{۴-r^۲}}(r^۲+z^۲)\,r\,dz\right)dr\right)d\theta \\ &= \int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left(\int_۰^{۲\cos\theta}\left[\left(r^۳z+r\frac{z^۳}{۳}\right)\right]_{-\sqrt{۴-r^۲}}^{\sqrt{۴-r^۲}}dr\right)d\theta=\frac{۴}{۳}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left(\int_۰^{۲\cos\theta}r(r^۲+۲)\sqrt{۴-r^۲}\,dr\right)d\theta \\ &= \frac{۴}{۳}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left(\int_{۲\sin\theta}^{۲}u^۲(u^۲-۶)\,du\right)d\theta=\frac{۳۲}{۱۵}\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\Big(۲\sin^۷\theta+۳-۵\sin^۳\theta\Big)\,d\theta=\frac{۳۲}{۵} \end{aligned}$$

۵− قضیه گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F}=(x^۲-xy)\mathbf{i}+(xy-y^۲)\mathbf{j}$ و C مثلثی با رئوس $(۰,۰)$، $(۱,۱)$ و $(۲,۰)$، بررسی کنید.

حل. **الف) محاسبهٔ مستقیم.** در اینجا با فرض $O=(۰,۰)$، $A=(۱,۱)$ و $B=(۲,۰)$، داریم $C=\triangle OBA$ یا $C=OB\cup BA\cup AO$، که در آن

$$\begin{aligned} OB \ &:\ \mathbf{r}(t)=(۱-t)O+tB=(۲t,۰)\ ;\ ۰\le t\le ۱ \\ BA \ &:\ \mathbf{r}(t)=(۱-t)B+tA=(۲-t,t)\ ;\ ۰\le t\le ۱ \\ AO \ &:\ \mathbf{r}(t)=(۱-t)A+tO=(۱-t,۱-t)\ ;\ ۰\le t\le ۱ \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_{OB}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}+\int_{BA}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}+\int_{AO}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} \\ &= \int_۰^۱(۴t^۲,۰)\bullet(۲,۰)\,dt+\int_۰^۱(۲t^۲-۶t+۴,۲t-۲t^۲)\bullet(-۱,۱)\,dt+\int_۰^۱(۰,۰)\bullet(-۱,-۱)\,dt \\ &= ۴\int_۰^۱(t^۲+۲t-۱)\,dt=\frac{۴}{۳} \end{aligned}$$

ب) با استفاده از قضیه. داخل مثلث را به صورت $D\ :\ ۰\le y\le ۱\,,\ y\le x\le ۲-y$ می‌توان نوشت، در نتیجه

$$\iint\limits_D(Q_x-P_y)\,dA=\iint\limits_D(x+y)\,dA=\int_۰^۱\left(\int_y^{۲-y}(x+y)\right)dy=۲\int_۰^۱(۱-y^۲)\,dy=\frac{۴}{۳}$$

۶− قضیه استوکس را برای میدان نیروی $\mathbf{F}=(y+۲z)\mathbf{i}+(z+۲x)\mathbf{j}+(x+۲y)\mathbf{k}$ و منحنی C تحقیق کنید:

$$C\ :\ \mathbf{r}(t)=\big(۲\cos t,\sin t,\cos t+\sin t\big)\ ;\ ۰\le t\le ۲\pi$$

حل. **الف) محاسبهٔ مستقیم.** با توجه به اینکه منحنی پارامتره شده است، داریم

$$\begin{aligned} \oint_C C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} &= \int_۰^{۲\pi}\big(\cos t+۳\sin t,۵\cos t+\sin t,۲\cos t+۲\sin t\big)\bullet\big(-۲\sin t,\cos t,-\sin t+\cos t\big)\,dt \\ &= \int_۰^{۲\pi}\big(۷\cos^۲t-۸\sin^۲t-\sin t\cos t\big)\,dt=-\pi \end{aligned}$$

ب) **با استفاده از قضیه.** این منحنی محل برخورد صفحهٔ $۲z = x + ۲y$ و استوانهٔ $x^۲/۴ + y^۲ = ۱$ است. بنابراین آن را به صورت لبهٔ قسمتی از صفحهٔ $۲z = x + ۲y$ می‌توان تصور نمود که توسط استوانهٔ $x^۲/۴ + y^۲ = ۱$ جدا شده است. به عبارت دیگر، لبهٔ رویهٔ زیر:

$$S \,:\, z = x/۲ + y \,,\, (x, y) \in D \quad , \quad D \,:\, x^۲/۴ + y^۲ \leq ۱$$

به این ترتیب با فرض $f = ۲z - x - ۲y$، داریم

$$\mathbf{n} = \pm \frac{f'}{\|f'\|} = \pm \frac{۱}{۳}(-۱, -۲, ۲) \quad , \quad d\sigma = \frac{\|f'\|}{|f_z|}\, dxdy = \frac{۳}{۲}\, dxdy$$

که با توجه به جهت C، حالت مثبت در $\mathbf{n}$ مورد قبول است. بعلاوه

$$\mathrm{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y + ۲z & z + ۲x & x + ۲y \end{vmatrix} = (۱, ۱, ۱)$$

و در نتیجه

$$\iint_{(S)} \mathrm{Curl}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{۱}{۲} \iint_{D} (۱, ۱, ۱) \bullet (-۱, -۲, ۲)\, dxdy = -\frac{۱}{۲} \iint_{D} dxdy = -\frac{۱}{۲}\mathrm{Area}(D) = -\frac{۱}{۲} \times \pi \times ۱ \times ۲ = -\pi$$

۷– در صورتی که $\mathbf{F} = -\frac{۱}{r^۳}\Big(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\Big)$ باشد، که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$، قضیه دیورژانس را برای ناحیه محدود به دو کره $۱ \leq x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴$ بررسی کنید.

حل. **الف) محاسبهٔ مستقیم.** از مختصات قطبی برای پارامتره نمودن کره‌های مورد نظر استفاده می‌کنیم:

$$S = S_۱ \cup S_۲ \quad ; \quad D \,:\, ۰ \leq \varphi \leq \pi \,,\, ۰ \leq \theta \leq ۲\pi$$
$$S_۱ \,:\, \mathbf{r}(\varphi, \theta) = (۲ \sin\varphi \cos\theta, ۲ \sin\varphi \sin\theta, ۲ \cos\varphi) \quad ; \quad (\varphi, \theta) \in D$$
$$S_۲ \,:\, \mathbf{r}(\varphi, \theta) = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi) \quad ; \quad (\varphi, \theta) \in D$$

در نتیجه

$$\mathbf{n}_۱\, d\sigma_۱ = \pm \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta\, d\varphi d\theta = \pm\, (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)\ ۴ \sin\varphi\, d\varphi d\theta$$
$$\mathbf{n}_۲\, d\sigma_۲ = \pm \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta\, d\varphi d\theta = \pm\, (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)\ \sin\varphi\, d\varphi d\theta$$

که در حالت اول + و در حالت دوم − مورد قبول است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma &= \iint_{(S_۱)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma + \iint_{(S_۲)} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, d\sigma \\ &= \iint_{D} -\frac{۱}{۸}\, (۲ \sin\varphi \cos\theta, ۲ \sin\varphi \sin\theta, ۲ \cos\varphi) \bullet (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)\ ۴ \sin\varphi\, d\varphi d\theta \\ &\quad + \iint_{D} -(\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi) \bullet (-\sin\varphi \cos\theta, -\sin\varphi \sin\theta, -\cos\varphi)\ \sin\varphi\, d\varphi d\theta \\ &= ۰ \end{aligned}$$

ب) **با استفاده از قضیه.** داخل رویهٔ داده شده عبارت است از $V \,:\, ۱ \leq x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴$ و دیورژانس میدان صفر است:

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \left(-\frac{۱}{r^۳} + \frac{۳x^۲}{r^۵}\right) + \left(-\frac{۱}{r^۳} + \frac{۳y^۲}{r^۵}\right) + \left(-\frac{۱}{r^۳} + \frac{۳z^۲}{r^۵}\right) = ۰$$

در نتیجه

$$\iiint_{V} \mathrm{div}(\mathbf{F})\, dV = ۰$$